Vektorrum

Alla mängder
V som uppfyller
axiomen
kallas

dec 8-10:03

Vektorrum.

Elementen i dessa är vektorer

dec 8-10:03

Funktionsrum

$$V = \{ f : M \to \mathbb{R} \}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

för alla $x \in M$.

$$(af)(x) = a f(x)$$

för alla $x \in M$.

dec 8-10:03

$M = \mathbb{R}$

- $f(x) = \sin(x)$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^2$

$\vdots$

dec 8-10:03

$\sin(x) + e^x$

en ny funktion

som är summan

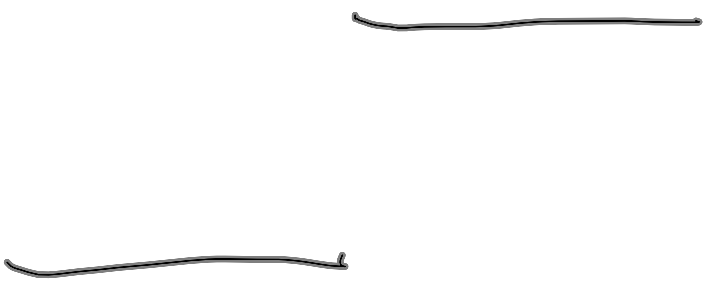
av $\sin(x)$ och

e^x.

dec 8-10:03

Kontinuerliga funktioner

Exempelvis inte



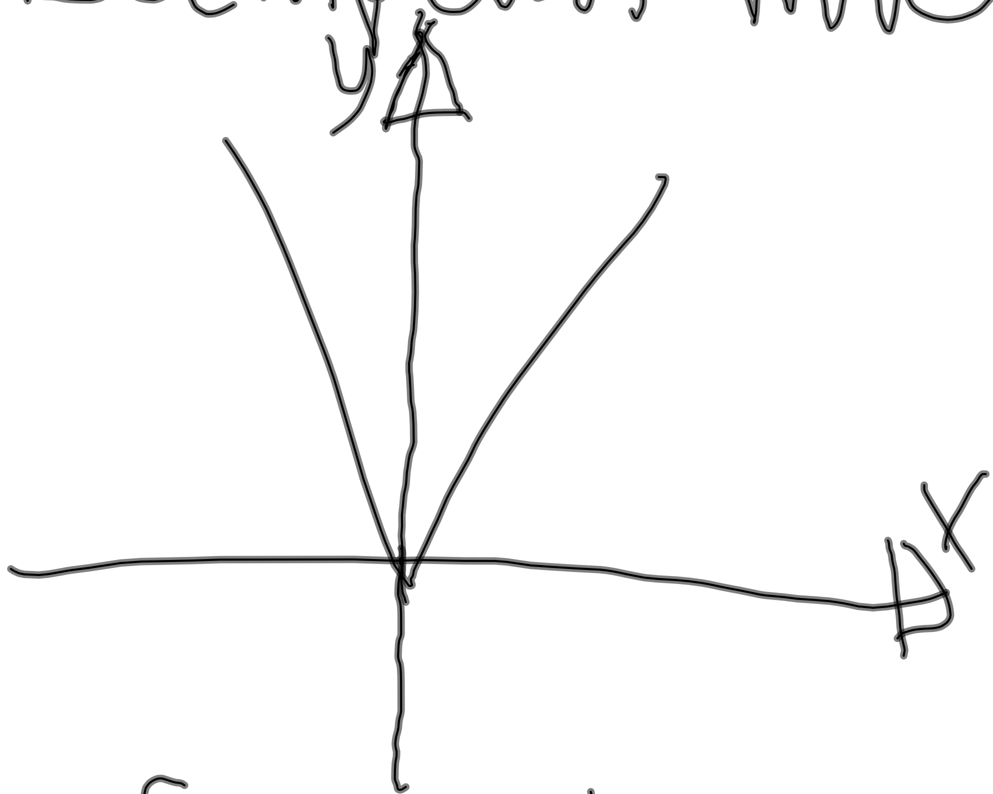
dec 8-10:03

Kontinuerligt deriverbara funktioner

f så att f' är kontinuerlig.

dec 8-10:03

Exempelvis inte



$f(x) = |x|$

dec 8-10:21

Lösningsmängd till differentialekvation:

$$y'' + y = 0$$

$$y = a\sin x + b\cos x$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

dec 8-10:22

Om y_1 och y_2

är lösningar

till $y'' + y = 0$

Så är också

$y_1 + y_2$ en lösning

eftersom

dec 8-10:24

$$(y_1+y_2)'' + y_1+y_2$$

$$= y_1''+y_2''+y_1+y_2$$

$$=(y_1''+y_1)+(y_2''+y_2)$$

$$= 0+0=0$$

dec 8-10:25

Exempel som inte är underrum?

$\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$

Uppfyller att

$u, v \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow u+v \in \mathbb{R}^+$

men

$(-1) \cdot u \notin \mathbb{R}^+$ om $u \in \mathbb{R}^+$

dec 8-10:28

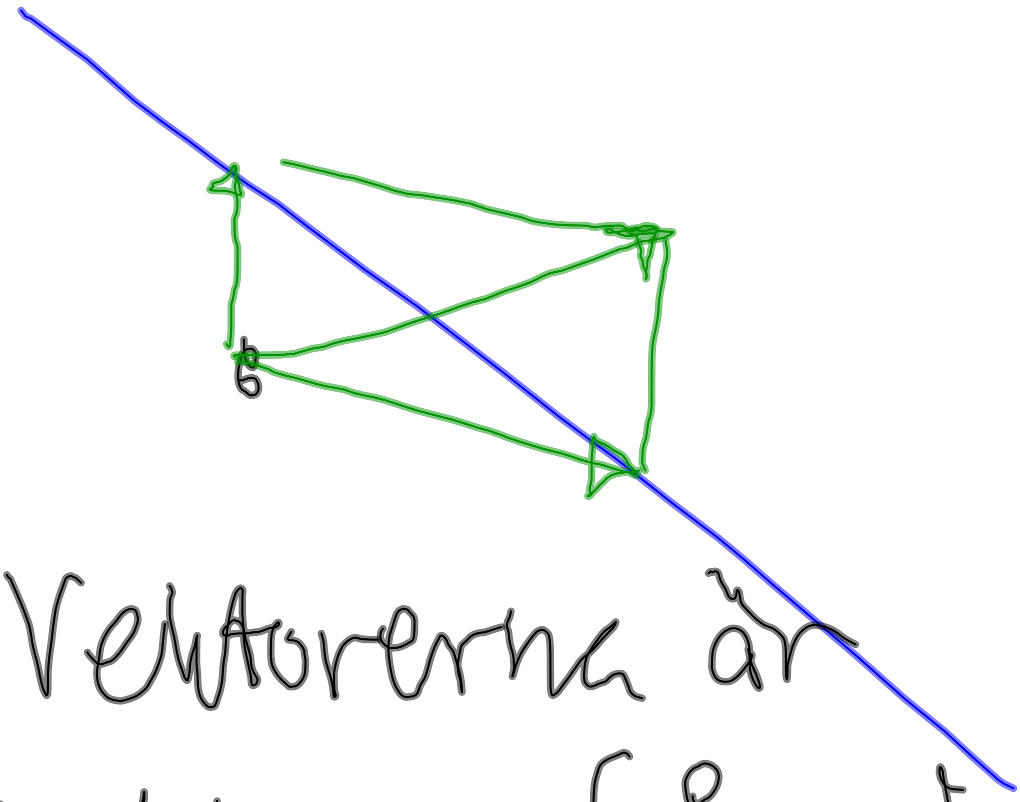
Exempel på delrum

I rummet $\mathbb{R}^3$ har vi fyra sorters delrum

- $O = \{0\}$
- linjer genom O
- Plan genom O
- hela $\mathbb{R}^3$

dec 8-10:30

Varför är inte alla linjer delrum?



Vektorerna är vektorer från origo och annars blir

dec 8-10:32

det inte slutet under addition.

dec 8-10:34

Andra exempel

delmängd i

$P_m \subseteq P_n \quad m \leq n$

Polynom av grad $\leq m$

Polynom av grad $\leq n$

dec 8-10:35

$U \subseteq V$ betyder att alla element i U också ligger i V

dvs

$$u \in U \Rightarrow u \in V$$

dec 8-10:37

$C^1[a,b]$ -

alla kontinuerligt deriverbara funktioner från $[a,b]$ till $\mathbb{R}$.

dec 8-10:38

Lösningsmängder till homogena ekvationssystem

$$Ax = 0$$

dec 8-10:41

Om x_1 och x_2 är två lösningar så är $x_1 + x_2$ en lösning eftersom

$A(x_1 + x_2) = Ax_1 +$

dec 8-10:41

$$+ A x_2 = 0 + 0$$

$$= 0$$

och

$a x_1$ är

en lösning eftersom

$$A(a x_1) = a A x_1 =$$

dec 8-10:42

$a \cdot 0 = 0$

Eftersom lösningsmängden ligger i $\mathbb{R}^n$ och är sluten under addition och multiplikation

dec 8-10:43

med skalår
är den ett
underrum
till $\mathbb{R}^n$

dec 8-10:44

Linjära avbildningar

$$T : C[0,1] \to C^1[0,1]$$

$$f(x) \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$$

$$f(x)+g(x) \longmapsto$$

$$\int_0^x f(t)+g(t)\,dt =$$

dec 8-11:06

$$= \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt$$

$$= T(f) + T(g)$$

$$af(x) \mapsto \int_0^x af(t)\,dt$$

$$= a\int_0^x f(t)\,dt =$$

$$= aT(f)$$

dec 8-11:07

Vi har att

$$D(T(f)) = f$$

eftersom

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$$

dec 8-11:10

Testa med

$$f(x) = x^2$$

$$\int_0^x t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{x^3}{3}$$

$$D\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$$

dec 8-11:11

Men $T(D(f)) \neq f$

eftersom konstanter

försvinner

$D(1) = 0$

$T(0) = 0 \neq 1$

dec 8-11:12

Skalärprodukt

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = (f,g)$$

$$(f,f) = \int_a^b f(t)^2\,dt$$

$$(f,f) = 0 \Rightarrow f = 0$$

om f

dec 8-11:17

$\underline{\underline{Ex}}$: $C[0, 2\pi]$

$(\sin, \cos)_{2\pi} =$

$= \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\,dt$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2t)\,dt$

$= \left[\frac{1}{4} - \cos(2t)\right]_0^{2\pi} =$

dec 8-11:20

$$\frac{1}{4} - \cos(4\pi) - \frac{1}{4} + \cos(0)$$

$$= \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{4} + 1 =$$

$$= 0$$

dec 8-11:21

Vilken är längden av sin och cos?

$$|\sin|^2 = (\sin, \sin)$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt =$$

dec 8-11:22

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt$$

$$= \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{2\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{4} - \frac{0}{2}$$

$$+ \frac{\sin 0}{4} = \pi$$

dec 8-11:24

Alltså är

$$|\sin| = \sqrt{\pi}$$

och

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x)$$

blir en ON-bas för lösnings-

dec 8-11:25

mängden till

$$y'' + y = 0$$

Om vi vill

hitta polynom

$$p(x) = ax + b$$

som ligger så

dec 8-11:26

nära som möjligt.
Då vill vi att
skillnaden mellan
p och dess projektion
på lösningsrummet
ska bli så liten
som möjligt.

dec 8-11:29

Börja med att projicera på lösningsrummet.

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x)$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x)$$

dec 8-11:30

Projektionen

ges av

$$(p, \bar{e}_1)\bar{e}_1 + (p, \bar{e}_2)\bar{e}_2$$

Behöver räkna ut

$$\int_0^{2\pi} (at+b)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t \, dt$$

dec 8-11:31

och

$$\int_0^{2\pi} (at+b)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t\,dt$$

Den första blir

$-\frac{2\pi a}{\sqrt{\pi}}$ och den

andra blir 0.

dec 8-11:32

Alltså blir

projektionen

av $p(x) = ax + b$

$$-\frac{2\pi a}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x)$$

$$= -2a \sin(x)$$

dec 8-11:36

Skillnaden blir

$$p-(-2a\sin(x))$$

$$=ax+b+2a\sin(x)$$

$$(ax+b+2a\sin x, ax+b+2a\sin(x))$$

$$=$$

dec 8-11:38

$-4a^2\pi + 4ab\pi^2 +$

$\frac{8}{3}a^2\pi^3 + 2b^2\pi$

Detta blir minst

för $a=b=0$.

Matrisen för

den kvadratiska

dec 8-11:41

formen blir

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3}\pi^3 - 4\pi & 2\pi^2 \\ 2\pi^2 & 2\pi \end{pmatrix}$$

dec 8-11:44